

Να εξετασθεί ως προς τη σύγκλιση

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\sin x| + |\cos x|}{|x| + 1} dx$$

ΛΥΣΗ

Το παραπάνω ολοκλήρωμα είναι μικτού είδους... τότε το σπάμε στο 0, και στο πρώτο ολοκλήρωμα κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $y=-t$. Άρα παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\sin x| + |\cos x|}{|x| + 1} dx &= \int_{-\infty}^0 \frac{|\sin x| + |\cos x|}{|x| + 1} dx + \int_0^{\infty} \frac{|\sin x| + |\cos x|}{|x| + 1} dx \\ &= 2 \int_0^{\infty} \frac{|\sin x| + |\cos x|}{|x| + 1} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \implies |\sin x| + |\cos x| \geq 1 \implies \frac{|\sin x| + |\cos x|}{|x| + 1} &\geq \frac{1}{|x| + 1} \implies \\ \int_0^{\infty} \frac{|\sin x| + |\cos x|}{|x| + 1} dx &\geq \int_0^{\infty} \frac{1}{|x| + 1} dx = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x + 1} = +\infty \end{aligned}$$